Théorème 4. *Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Soient $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de A. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est égal à l'ensemble des solutions de*

1.

2.

Existence des solutions d'une équation matricielle

Considérons une matrice A de taille $m \times n$. Alors $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$

Le théorème suivant précise dans quelles conditions la matrice A correspond à un système compatible :

Théorème 5. *Soit A une matrice $m \times n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution ;*
2. *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice des coefficients A ;*
3. *Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$;*
4. *Chaque ligne de A possède un pivot.*

Exemple Soit S le système

$$S = \begin{cases} x_1 - 2x_2 3 + x_3 = b_1 \\ x_2 - 4x_3 = b_2 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = b_3 \end{cases}$$

avec

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Suite de l'exemple

Remarques

Preuve du théorème 5

Exemple 1

Suite de l'exemple 1

Exemple 2

1.6 Forme de l'ensemble des solutions d'une équation matricielle

A) Étude des solutions d'un système homogène

Soit A une matrice $m \times n$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On considère le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$, où $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$. On a vu que le système est toujours consistant. Plus précisément, on a soit

1) une unique solution

2) une infinité de solutions, comprenant la solution triviale.

Résultat
Un système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non-triviale si et seulement si on a au moins une variable libre.

Exemple 1
Soit le système homogène

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Exemple 2

B) Étude des solutions d'un système non-homogène

On va s'intéresser à des systèmes non-homogènes $A\vec{x} = \vec{b}$ (où $\vec{b} \neq \vec{0}$) compatibles admettant une infinité de solutions et décrire la forme de celles-ci.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$:

Théorème 6. *Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tels que $A\vec{x} = \vec{b}$ admette une solution $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme*

Exemple dans $\mathbb{R}^3$:

$$S = \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 4 \end{cases}$$